ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP. HCM
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

LƯU XUÂN THẮNG

BÀI TOÁN CAUCHY CHO PHƯƠNG TRÌNH ELLIPTIC VỚI HỆ SỐ BỊ NHIỄU

TÓM TẮT LUẬN ÁN

TP. Hồ Chí Minh – Năm 2024

Công trình được hoàn thành tại ....

Người hướng dẫn khoa học: GS. TS. Đặng Đức Trọng

Phản biện 1: PGS. TS. Nguyễn Huy Tuấn

Phản biện 2: PGS. TS. Nguyễn Minh Quân

Phản biện 3: PGS. TS. Nguyễn Thành Nhân

Phản biện độc lập 1: PGS. TS. Trần Vũ Khanh

Phản biện độc lập 2: PGS. TS. Nguyễn Huy Tuấn

Luận án sẽ được bảo vệ trước Hội đồng chấm Luận án cấp cơ sở đào tạo họp tại Trường Đại học Khoa học Tự nhiên vào hồi ... giờ .... ngày .... tháng ... năm .....

Có thể tìm hiểu luận án tại thư viện:

- Thư viện Khoa học Tổng hợp TP. HCM
- Thư viện Đại học Quốc gia TP.HCM
- Thư viện Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, ĐHQG - HCM

Danh mục các ký hiệu

$\mathbb{N}$	Tập các số tự nhiên
$\mathbb{R}$	Tập các số thực
$\mathbb{R}^+$	Tập các số thực dương
$\mathbb{C}$	Tập các số phức
Ω	Miền bị chặn trong $\mathbb{R}^n$
$L^p(\Omega)$	Không gian các hàm khả tích bậc p trên Ω
$\langle \cdot, \cdot \rangle_p$	Tích vô hướng trong $H^p(\Omega)$
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\Omega)}$	Tích vô hướng trong $L^2(\Omega)$
$\\| \cdot \\|_{L^2(\Omega)}$	Chuẩn trong $L^2(\Omega)$
$W^{1,p}(\Omega)$	Không gian Sobolev
$\mathcal{D}'(0, Y)$	Không gian các phân bố trên $(0, Y)$
$\mathbf{Ge}_\kappa$	Không gian Gevrey

Mục lục

Mở đầu

Bài toán Cauchy cho phương trình elliptic có ứng dụng nhiều trong thực tế thuộc các lĩnh vực như vật lý địa cầu, cơ học chất lỏng, tim mạch, trường điện sinh và kiểm định không xâm lấn [5, 12]. Ngoài ra, bài toán này còn được sử dụng để khảo sát trường hấp dẫn mà cụ thể là trường điện từ. Do vậy việc tìm hiểu bài toán Cauchy dạng này đã được nhiều nhà nghiên cứu quan tâm. Cụ thể, như các kết quả trong các bài báo sau đây [17], [19], [22], [34], [40] và [41].

Dù vậy, trong tất cả các bài toán trên thì trường hợp bài toán Cauchy cho phương trình elliptic với hệ số không là hằng số bị nhiễu vẫn chưa có nhiều nghiên cứu. Do vậy, trong luận án này, chúng tôi sẽ khảo sát hai bài toán như sau.

Bài toán 1. *Cho* Ω *là một miền bị chặn trong* $\mathbb{R}^N$ *với biên trơn* $\partial\Omega$ *và một toán tử tuyến tính không bị chặn* $A : D(A) \to L^2(\Omega)$ *xác định trên một không gian con trù mật* $D(A)$ *trong* $L^2(\Omega)$*. Với một hằng số* $Y > 0$*, hãy tìm một hàm* $u : \Omega \times [0, Y] \to \mathbb{R}$ *thỏa*

$$-c(y)Au(x, y) + u_{yy}(x, y) = \mathbf{f}(x, y), x \in \Omega,\ 0 < y < Y \qquad (1)$$

$$u(x, 0) = g_1(x), u_y(x, 0) = g_2(x),\ x \in \Omega, \qquad (2)$$

với $g_1, g_2, \mathbf{f}(., y) \in L^2(\Omega)$*. Ta xét hệ số* $c : [0, Y] \to (0, \infty)$ *bị nhiễu và* *được xấp xỉ bởi hàm đo được $\mu : [0, Y] \to (0, \infty)$ thỏa $\mu \in C^2[0; Y]$ và*

$$\sup_{0 \leqslant y \leqslant Y} \left(\sum_{m=0}^{2} \left| \frac{d^m c}{dy^m}(y) - \frac{d^m \mu}{dy^m}(y) \right| \right) \leqslant \delta,$$

với sai số $\delta > 0$.

Bài toán này là không chỉnh và do đó việc đưa ra phương pháp chỉnh hóa đối với bài toán này là cần thiết.

Bài toán 2. *Xét một miền Ω bị chặn trong $\mathbb{R}^N$ với biên trơn $\partial\Omega$ và một toán tử elliptic $\mathbb{A}$ có dạng $\mathbb{A}u(x) = -\sum\limits_{i,j=1}^{N} \partial_i \left(a^{ij} \partial_j u(x) \right)$. Ở đây $D(\mathbb{A}) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ là một không gian con trù mật của $L^2(\Omega)$. Mỗi (a^{ij}) là một ma trận xác định dương, $a^{ij} \in L^\infty(\Omega)$ và $x = (x_1, \ldots, x_N)$, $\partial_j = \partial / \partial x_j$. Như trong [13], có một hằng số $\kappa > 0$ sao cho $\sum\limits_{i,j=1}^{N} a^{ij}(x) \zeta_i \zeta_j \geqslant \kappa \|\zeta\|_{\mathbb{R}^N}^2$ cho mọi $\zeta \in \mathbb{R}^N$. Toán tử $\mathbb{A}$ là tuyến tính và nó là một toán tử không bị chặn. Chúng ta xét Với một hằng số $Y > 0$, chúng ta tìm hàm $u = u_{\tau, f, g} : \Omega \times [0, Y] \to \mathbb{R}$ sao cho*

$$-\tau(y)\mathbb{A}u(x,y) + u_{yy}(x,y) = F(x, y, u(x,y)), \quad x \in \Omega,\ 0 < y < Y, \tag{3}$$

$$u(x,0) = f(x), \quad u_y(x,0) = g(x), \quad x \in \Omega, \tag{4}$$

trong đó $f, g \in L^2(\Omega)$. Ở đây, F thuộc $C(\Omega \times [0, Y] \times \mathbb{R})$ và $F(.,.,0) = 0$. Hơn nữa, F thỏa mãn điều kiện Lipschitz như sau.

$$|F(x,y,v) - F(x,y,w)| \leqslant M\,|v - w|\,, \forall v, w \in \mathbb{R}, \quad y \in [0, Y],$$

trong đó M là một hằng số không phụ thuộc vào x nhưng có thể phụ thuộc vào y.

Hơn nữa, giả sử rằng các hàm τ và f, g bị nhiễu. Trong đó, $\tau : [0, Y] \to (0, \infty)$ được xấp xỉ bởi hàm đo được μ với $\mu \in \Delta_\delta$ và Δ_δ là tập hợp các *hàm* $\mu \in C^2[0,Y]$ *đồng thời*

$$\sup_{0\leqslant y\leqslant Y}\left(\sum_{m=0}^{2}\left|\frac{d^m\tau}{dy^m}(y)-\frac{d^m\mu}{dy^m}(y)\right|\right)\leqslant \delta, \tag{5}$$

trong đó $\delta > 0$ *là sai số do đo đạc. Và, dữ liệu* f, g *được xấp xỉ bằng dữ liệu nhiễu* $f_\varepsilon, g_\varepsilon \in L^2(\Omega)$ *thỏa mãn*

$$\|f - f_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} + \|g - g_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \varepsilon. \tag{6}$$

Bài toán phi tuyến (3)-(4) với hệ số và dữ liệu bị nhiễu là bài toán không chỉnh và cần phải sử dụng phương pháp chỉnh hóa.

Theo hiểu biết của chúng tôi, vì ở cả hai bài toán trên đều có hệ số chứa biến nên việc áp dụng trực tiếp các phương pháp tiếp cận trước đó sẽ gặp thách thức. Do vậy, đối với các bài toán này, trước tiên, bằng phương pháp biến đổi Liouville, chúng ta sẽ đưa bài toán về dạng có thể áp dụng được phương pháp như các bài toán chứa hệ số hằng trước đó. Kế đến, chúng tôi sẽ đề xuất phương pháp chặt cụt để chỉnh hóa Bài toán 1 và phương pháp hàm lọc để chỉnh hóa Bài toán 2. Đồng thời, chúng tôi khảo sát về sự tồn tại và duy nhất nghiệm của hai bài toán chỉnh hóa. Sau cùng là kết quả chứng minh về sự hội tụ của nghiệm chỉnh hóa đến nghiệm chính xác của từng bài toán.

Ngoài phần Mở đầu, Kết luận và Tài liệu tham khảo, luận án được trình bày trong ba chương. Trong đó,

Chương 1. Kiến thức chuẩn bị.

Chương 2. Chỉnh hóa bài toán 1.

Chương 3. Chỉnh hóa bài toán 2.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Trong chương này, trước hết, chúng tôi giới thiệu một số không gian Lebesgue và không gian Sobolev bậc nguyên cũng như một số tính chất căn bản của chúng. Những không gian này được xác định trên một miền bị chặn $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Kế đến, một số khái niệm căn bản về bài toán không chỉnh và toán tử chỉnh hóa cũng được đề cập. Và cuối cùng là một số bất đẳng thức được sử dụng ở những phần sau. Nội dung này có thể tham khảo ở [1, 2, 11, 22].

Chương 2

Chỉnh hóa Bài toán 1

Chương này chứa nội dung chủ yếu của bài báo [P1].

2.1 Giới thiệu

Trước hết, để tiện theo dõi chúng ta phát biểu lại Bài toán được quan tâm như sau.

Bài toán 1. *Cho Ω là một miền bị chặn trong $\mathbb{R}^N$ với biên trơn $\partial\Omega$ và một toán tử tuyến tính không bị chặn $A : D(A) \to L^2(\Omega)$ xác định trên một không gian con trù mật $D(A)$ trong $L^2(\Omega)$. Với một hằng số $Y > 0$, hãy tìm một hàm $u : \Omega \times [0, Y] \to \mathbb{R}$ thỏa*

$$-c(y)Au(x,y) + u_{yy}(x,y) = \mathbf{f}(x,y), \quad x \in \Omega,\, 0 < y < Y, \tag{2.1}$$

$$u(x,0) = g_1(x), u_y(x,0) = g_2(x),\, x \in \Omega, \tag{2.2}$$

với $g_1, g_2, \mathbf{f}(.,y) \in L^2(\Omega)$. Ta xét hệ số $c : [0,Y] \to (0,\infty)$ bị nhiễu và được xấp xỉ bởi hàm đo được $\mu : [0,Y] \to (0,\infty)$ thỏa

$$\sup_{0 \leqslant y \leqslant Y} \left(\sum_{m=0}^{2} \left| \frac{d^m c}{dy^m}(y) - \frac{d^m \mu}{dy^m}(y) \right| \right) \leqslant \delta,$$

với sai số $\delta > 0$.

Lúc này để thuận tiện về sau, Bài toán (2.1)-(2.2) với hệ số μ được gọi là Bài toán $\mathcal{B}(\mu)$.

2.2 Biểu diễn nghiệm dưới dạng khai triển Fourier

Ta có thể viết lại nghiệm của Bài toán $\mathcal{B}(\mu)$ dưới dạng khai triển Fourier. Thật vậy, Bài toán $\mathcal{B}(\mu)$ có thể viết lại như sau: Tìm hàm $v_\mu \in C([0, T_\mu], L^2(\Omega))$, sao cho

$$v_\mu(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} H_{n\mu}(t, v_\mu)\varphi_n(x), \tag{2.3}$$

với $g_{1n} = \langle g_1, \varphi_n\rangle_{L^2(\Omega)}$, $g_{2n} = \langle g_2, \varphi_n\rangle_{L^2(\Omega)}$, $w \in C([0,T]; L^2(\Omega))$ và

$$\begin{aligned} &H_{n\mu}(t,w) \\ &= g_{1n}[\mu(0)]^{\frac{1}{4}} \cosh \sqrt{\lambda_n} t + \frac{g_{1n}}{\sqrt{\lambda_n}} \left(\frac{1}{4}[\mu(0)]^{-\frac{5}{4}} \frac{d\mu}{dy}(0) \right) \sinh \sqrt{\lambda_n} t \\ &+ \frac{g_{2n}[\mu(0)]^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{\lambda_n}} \sinh \sqrt{\lambda_n} t + \int_0^t \frac{\sinh\left[\sqrt{\lambda_n}(t-z)\right]}{\sqrt{\lambda_n}} F_{\mu n}(z,w)dz, \end{aligned} \tag{2.4}$$

với

$$F_{\mu n}(t,w) = q_\mu(G_\mu^{-1}(t))\langle w(.,t), \varphi_n\rangle_{L^2(\Omega)} + [\mu(G_\mu^{-1}(t))]^{-\frac{3}{4}} \mathbf{f}_n(G_\mu^{-1}(t)), \tag{2.5}$$

$$\mathbf{f}_n(G_\mu^{-1}(t)) = \left\langle \mathbf{f}(., G_\mu^{-1}(t)), \varphi_n \right\rangle_{L^2(\Omega)}. \tag{2.6}$$

2.3 Sự tồn tại nghiệm yếu của Bài toán $\mathcal{B}(\mu)$

Trong mục này, ta sẽ đưa ra ước lượng tiên nghiệm cho v_m trên không gian $E(\Omega, \alpha)$. Không gian được này được giới thiệu trong [24]. Khi đó ta có được kết quả của việc tồn tại nghiệm yếu cho Bài toán $\mathcal{B}(\mu)$.

Định lý 2.1. *Cho $0 < \delta < \delta_0$, $\mu \in \mathcal{D}_\delta$. Đặt $T_\mu = G_\mu(Y)$, $\alpha = (\alpha_k)$ với $\alpha_k = \frac{T_\mu^{2k}}{(2k)!}$, ta giả sử rằng g_1, g_2 thuộc $E(\Omega, \alpha)$ và $\mathbf{f}$ thuộc $L^2(0, Y; E(\Omega, \alpha))$, khi đó tồn tại một hàm $u : \Omega \times (0, Y) \to \mathbb{R}$ sao cho $u \in L^\infty(0, Y; L^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$, $u_y \in L^\infty(0, Y; L^2(\Omega))$ và*

$$-\mu(y)Au + u_{yy} = \mathbf{f}(x, y) \quad \text{yếu trên} \quad \Omega \times (0, Y),$$
$$u(x, 0) = g_1(x), u_y(x, 0) = g_2(x),\ x \in \Omega.$$

Để chứng minh định lý này, ta cần bổ đề sau đây về ước lượng hàm v_m về sau.

Bổ đề 2.1. *Giả sử $g_1, g_2, \mathbf{f}$ thỏa mãn các giả thiết của Định lý 2.1. Và $g_{1m}, g_{2m} \in V_m, \mathbf{f}_m \in L^2(0, Y; V_m)$ thỏa mãn*

$$\lim_{m\to\infty} \|g_{1m} - g_1\|_{L^2(\Omega)} = \lim_{m\to\infty} \|g_{2m} - g_2\|_{L^2(\Omega)} = 0,$$
$$\lim_{m\to\infty} \|\mathbf{f}_m - \mathbf{f}\|_{L^2(0,Y;L^2(\Omega))} = 0,$$
$$\sup_m \|g_{1m}\|_{E(\Omega,\alpha)},\ \sup_m \|g_{2m}\|_{E(\Omega,\alpha)},\ \sup_m \|\mathbf{f}_m\|_{L^2(0,Y;E(\Omega,\alpha))} < \infty.$$

Khi đó, ta có các ước lượng sau.

$$\|v_m(., t)\|^2_{L^2(\Omega)}$$
$$\leqslant \mathcal{C}_1(T_\mu)\left(\sup_m \|g_{1m}\|^2_{E(\Omega,\alpha)} + \sup_m \|g_{2m}\|^2_{E(\Omega,\alpha)} + \sup_m \|\mathbf{f}_m\|^2_{L^2(0,T_\mu;E(\Omega,\alpha))}\right),$$

$\left\|\frac{\partial v_m}{\partial t}(.,t)\right\|^2_{L^2(\Omega)}$

$$\leqslant \mathcal{C}_2(T_\mu)\left(\sup_m \|g_{1m}\|^2_{E(\Omega,\alpha)} + \sup_m \|g_{2m}\|^2_{E(\Omega,\alpha)} + \sup_m \|\mathbf{f}_m\|^2_{L^2(0,T_\mu;E(\Omega,\alpha))}\right).$$

Hơn nữa, v_m bị chặn trong $C([0,T_\mu];H^1_0(\Omega))$.

2.4 Nghiệm chỉnh hóa và một số ước lượng

Trong mục này, ta sử dụng phương pháp chặt cụt để chỉnh hóa bài toán. Ta nhắc lại rằng $t_\mu = G_\mu(y) = \int\limits_0^y [\mu(s)]^{\frac{1}{2}} ds$. Với $r > \lambda_1$, giả sử $n_r \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $\lambda_{n_r} \leqslant r^2 < \lambda_{n_r+1}$. Ta xét bài toán tìm $v_{r\mu} \in C([0,T_\mu],L^2(\Omega))$, $T_\mu = G_\mu(Y)$, sao cho

$$v_{r\mu}(x,t) = \sum_{n=1}^{n_r} H_{n\mu}(t,v_{r\mu})\varphi_n(x), \tag{2.7}$$

trong đó, $H_{n\mu}$ được xác định như trong (2.4).

Khi đó, nếu nghiệm $v_{r\mu} \in C([0,T_\mu];L^2(\Omega))$ thỏa mãn (2.7) thì ta có thể chứng minh nghiệm chỉnh hóa của Bài toán $\mathcal{B}(\mu)$ là

$$u_{r\mu}(x,y) = [\mu(y)]^{-\frac{1}{4}} v_{r\mu}(x,G_\mu(y)).$$

Trước hết, ta khảo sát sự tồn tại và duy nhất nghiệm của Bài toán (2.7).

Định lý 2.2. *Bài toán (2.7) tồn tại duy nhất nghiệm trong $C([0,T_\mu];L^2(\Omega))$.*

Bổ đề 2.2. *Cho $\eta \in \mathcal{D}_\delta$ với $0 < \delta < \delta_0$. Giả sử rằng $v_{r\eta}$ là nghiệm duy nhất của Bài toán (2.7) ứng với hệ số η. Khi đó, chúng ta có ước lượng như sau*

$$\|v_{r\eta}(.,t_\eta)\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \left(D + D^2 t_\eta e^{Dt_\eta}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\sqrt{\lambda_{n_r}}t_\eta}.$$

Ở đây, $D = 4B^2 C_0^{\frac{1}{2}} Y \max\{\|\mathbf{f}\|^2_{L^2(0,Y;L^2(\Omega))}, 1\} + 4B^2 \|g_1\|^2_{L^2(\Omega)} + 4B^2 \|g_2\|^2_{L^2(\Omega)}$ *với* B *là môt hằng số độc lập với* η*.*

Định lý 2.3. *Cho* $\mu, \eta \in \mathcal{D}_\delta$*,* $0 < \delta < \delta_0$*, giả sử rằng* $v_{r\mu}$ *và* $v_{r\eta}$ *lần lượt là nghiệm của Bài toán (2.7) tương ứng với hệ số* μ *và* η *. Với* $t_{\mu\eta} = \max\{t_\mu, t_\eta\}$*, ta có ước lượng sau đây*

$$\|v_{r\mu}(.,t_\mu) - v_{r\eta}(.,t_\eta)\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \delta \sqrt{\tau_2(\lambda_{n_r})\left(1 + \tau_1 t_{\mu\eta} e^{\tau_1 t_{\mu\eta}}\right)} e^{\sqrt{\lambda_{n_r}} t_{\mu\eta}}. \tag{2.8}$$

Ở đây, τ_1 *là hệ số độc lập với* μ, η *và* τ_2 *phụ thuộc vào* λ_{n_r}*.*

Định lý 2.4. *Cho* $\overline{E} > 0$*,* $\mu \in \mathcal{D}_\delta$*,* $0 < \delta < \delta_0$*, và* v_μ*,* $v_{r\mu}$ *theo thứ tự là nghiệm của Bài toán (2.3) và Bài toán (2.7). Giả sử rằng*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n |\langle v_\mu(.,t_\mu), \varphi_n \rangle_{L^2(\Omega)}|^2 \leqslant \overline{E} \quad \text{với} \quad \mu \in \mathcal{D}_\delta. \tag{2.9}$$

Khi đó, ta có ước lượng sau đây

$$\|v_{r\mu}(.,t_\mu) - v_\mu(.,t_\mu)\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \sqrt{I_1(\lambda_{n_r}) e^{I_2(\mu) t_\mu}}, \tag{2.10}$$

với

$$I_1(\lambda_{n_r}) = \frac{\overline{E}}{\lambda_{n_r}}, \; I_2(\mu) = \frac{Q_0^2 t_\mu}{\lambda_1}.$$

2.5 Kết quả hội tụ

Phần này, ta trình bày kết quả hội tụ của nghiệm chỉnh hóa về nghiệm chính xác bằng cách sử dụng một số kết quả đã được trình bày ở Chương 2.

Định lý 2.5. *Cho $\mu \in \mathcal{D}_\delta$ và $0 < \delta < \delta_0$. Giả sử rằng $u_{r\mu}$ là nghiệm chỉnh hóa của bài toán ứng với dữ liệu đo được μ và u_c là nghiệm của bài toán ứng với dữ liệu chính xác c. Khi đó, ta có ước lượng sau đây*

$$\begin{aligned}
\|u_{r\mu}(.,y) - u_c(.,y)\|_{L^2(\Omega)} &\leqslant c_0^{-\frac{1}{4}}\delta\sqrt{\tau_2(\lambda_{n_r})\left(1+\tau_1 t_{\mu c}e^{\tau_1 t_{\mu c}}\right)}e^{\sqrt{\lambda_{n_r}}t_{\mu c}} \\
&+ \delta L_{-\frac{1}{4}}\left(D + D^2 t_c e^{Dt_c}\right)^{\frac{1}{2}}e^{\sqrt{\lambda_{n_r}}t_{\mu c}} \\
&+ c_0^{-\frac{1}{4}}\sqrt{I_1(\lambda_{n_r})e^{I_2(c)t_c}}.
\end{aligned}$$

Chú ý 2.5.1. Nếu chọn $0 < \gamma < 1/t_{\mu c}$ và $r = r(\delta) = \ln\left(\frac{1}{\delta^\gamma}\right)$, thì ta nhận được $r(\delta) \to +\infty$ khi $\delta \to 0^+$. Trong trường hợp này vế phải của (2.11) bé hơn hoặc bằng $\frac{C}{\ln\left(\frac{1}{\delta^\gamma}\right)}$ với C là một hằng số dương. Với cách chọn, vế phải dần về không khi $\delta \to 0^+$.

Chương 3

Chỉnh hóa Bài toán 2

Chương này chứa nội dung chủ yếu của bài báo [P2].

3.1 Giới thiệu

Chúng ta xem xét

Bài toán $A_{\tau,f,g}$: *Với một hằng số $Y > 0$, chúng ta tìm hàm $u = u_{\tau,f,g} : \Omega \times [0, Y] \to \mathbb{R}$ sao cho*

$$-\tau(y)\mathbb{A}u(x, y) + u_{yy}(x, y) = F(x, y, u(x, y)), \quad x \in \Omega,\ 0 < y < Y, \tag{3.1}$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_y(x, 0) = g(x), \quad x \in \Omega, \tag{3.2}$$

trong đó $f, g \in L^2(\Omega)$. Ở đây, F thuộc $C(\Omega \times [0, Y] \times \mathbb{R})$ và $F(., ., 0) = 0$. Hơn nữa, F thỏa mãn điều kiện Lipschitz như sau.

$$|F(x, y, v) - F(x, y, w)| \leqslant M\,|v - w|\,, \forall v, w \in \mathbb{R}, \quad y \in [0, Y],$$

trong đó M là một hằng số không phụ thuộc vào x nhưng có thể phụ thuộc vào y.
Hàm dương $\tau \in C^2[0, Y]$ và các hàm f, g đều bị nhiễu. Trong đó hàm

τ được biết thông qua một hàm $\mu : [0, Y] \to (0, \infty)$. Chúng ta giả định rằng $\mu \in \Delta_\delta$ và Δ_δ là tập hợp các hàm $\mu \in C^2[0, Y]$ đồng thời

$$\sup_{0 \leqslant y \leqslant Y} \left(\sum_{m=0}^{2} \left| \frac{d^m \tau}{dy^m}(y) - \frac{d^m \mu}{dy^m}(y) \right| \right) \leqslant \delta, \tag{3.3}$$

trong đó số $\delta > 0$ là mức độ nhiễu. Tương tự, f, g cũng chỉ được xấp xỉ bằng dữ liệu nhiễu $f_\varepsilon, g_\varepsilon \in L^2(\Omega)$ thỏa mãn

$$\|f - f_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} + \|g - g_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \varepsilon.$$

Bài toán $A_{\mu,f,g}$ không chỉnh theo nghĩa nghiệm không phụ thuộc liên tục vào dữ liệu đầu. Vì vậy, cần phải sử dụng phương pháp chỉnh hóa để chỉnh hóa bài toán.

3.2 Nghiệm tích phân của Bài toán $A_{\mu,f,g}$

Ta đặt

$$G_\mu(y) := \int_0^y [\mu(z)]^{\frac{1}{2}} dz. \tag{3.4}$$

Trước hết, ta phát biểu Định lý sau đây.

Định lý 3.1. *Nếu Bài toán $A_{\mu,f,g}$ có nghiệm tích phân $u_{\mu,f,g}$ thuộc $C([0, Y], L^2(\Omega))$ thì nghiệm $u_{\mu,f,g}$ thỏa mãn phương trình sau đây*

$$u_{\mu,f,g}(x, y) = [\mu(y)]^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=1}^{\infty} W_{n\mu}(y, u_{\mu,f,g}) \varphi_n(x). \tag{3.5}$$

Trong đó,

$$\begin{aligned} W_{n\mu}(y, u_{\mu,f,g}) &= f_n^\mu \cosh[\sqrt{\lambda_n} G_\mu(y)] + h_n^\mu(f, g) \frac{\sinh[\sqrt{\lambda_n} G_\mu(y)]}{\sqrt{\lambda_n}} \\ &\quad + \int_0^y \frac{\sinh\left[\sqrt{\lambda_n}(G_\mu(y) - G_\mu(z))\right]}{\sqrt{\lambda_n}} [\mu(z)]^{\frac{1}{2}} P_{\mu n}(z, u_{\mu,f,g}) dz, \end{aligned} \tag{3.6}$$

và

$$f_n^\mu = [\mu(0)]^{\frac{1}{4}} f_n, \qquad h_n^\mu(f,g) = \left(\frac{1}{4}[\mu(0)]^{-\frac{5}{4}}\frac{d\mu}{dy}(0)\right) f_n \tag{3.7}$$

$$+ [\mu(0)]^{-\frac{1}{4}} g_n,$$

$$P_{\mu n}(z, u_{\mu,f,g}) = \rho_\mu(z)[\mu(z)]^{\frac{1}{4}}\theta_n(z) + [\mu(z)]^{-\frac{3}{4}} F_n(z, u_{\mu,f,g}),$$

$$\rho_\mu(z) = -\frac{5}{16}[\mu(z)]^{-3}\left(\frac{d\mu}{dz}\right)^2 + \frac{1}{4}[\mu(z)]^{-2}\frac{d^2\mu}{dz^2}. \tag{3.8}$$

3.3 Phương pháp chỉnh hóa lọc và nghiệm chỉnh hóa

Bây giờ, chúng ta xem phương trình (3.5), bằng cách thay thế (f, g) bằng $(f_\varepsilon, g_\varepsilon)$ in (3.6), ta có

$$\begin{aligned}
&W_{n\mu}(y, u_{\mu,f_\varepsilon,g_\varepsilon}) \\
&= f_{\varepsilon n}^\mu \cosh[\sqrt{\lambda_n} G_\mu(y)] + h_n^\mu(f_\varepsilon, g_\varepsilon)\frac{\sinh[\sqrt{\lambda_n} G_\mu(y)]}{\sqrt{\lambda_n}} \\
&+ \int_0^y \frac{\sinh\left[\sqrt{\lambda_n}(G_\mu(y) - G_\mu(z))\right]}{\sqrt{\lambda_n}}[\mu(z)]^{\frac{1}{2}} P_{\mu n}(z, u_{\mu,f_\varepsilon,g_\varepsilon})dz,
\end{aligned} \tag{3.9}$$

với G_μ được định nghĩa như trong (3.4).

Giả sử

$$G_0 \geqslant \sup_{\mu \in \Delta_\delta} G_\mu(Y). \tag{3.10}$$

Từ phương pháp chỉnh hóa lọc mở rộng, chúng ta cũng thay thay hạng tử $W_{n\mu}(y, u_{\mu,f_\varepsilon,g_\varepsilon})$ trong (3.9) bằng

$$\begin{aligned}
&W^*_{n\mu}(y, u_{\mu,f_\varepsilon,g_\varepsilon}) \\
&= S^*_{\alpha,\lambda_n}[G_\mu(y)]f^\mu_{\varepsilon n} + Q^*_{\alpha,\lambda_n}[G_\mu(y)]h^\mu_n(f_\varepsilon, g_\varepsilon) \\
&+ \left(\int_0^y P_{\mu n}(z, u_{\mu,f_\varepsilon,g_\varepsilon})[\mu(z)]^{\frac{1}{2}} R^*_{\alpha,\lambda_n}[G_\mu(y) - G_\mu(z)]dz \right).
\end{aligned}$$

Ở đây, các hàm $S^*_{\alpha,\xi}, Q^*_{\alpha,\xi}, R^*_{\alpha,\xi}$ được xác định như sau

$$S^*_{\alpha,\lambda_n}(t) = \frac{\cosh(\sqrt{\lambda_n}t)}{1 + \alpha\cosh(\sqrt{\lambda_n}G_0)}, \tag{3.11}$$

$$Q^*_{\alpha,\lambda_n}(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \frac{\sinh(\sqrt{\lambda_n}t) - \alpha\sinh\left[\sqrt{\lambda_n}(G_0 - t)\right]}{1 + \alpha\cosh(\sqrt{\lambda_n}G_0)}, \tag{3.12}$$

$$R^*_{\alpha,\lambda_n}(t) = \frac{\sinh\left(\sqrt{\lambda_n}t\right)}{\sqrt{\lambda_n}\left(1 + \alpha\cosh\left(\sqrt{\lambda_n}G_0\right)\right)}, \tag{3.13}$$

Từ đây, ta thấy nghiệm chỉnh hóa của bài toán $A_{\mu,f_\varepsilon,g_\varepsilon}$ sẽ có dạng sau đây

$$\begin{aligned}
&u_{\alpha,\mu,f_\varepsilon,g_\varepsilon} \\
&= [\mu(y)]^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(S^*_{\alpha,\lambda_n}[G_\mu(y)]f^\mu_{\varepsilon n} + Q^*_{\alpha,\lambda_n}[G_\mu(y)]h^\mu_n(f_\varepsilon, g_\varepsilon)\right)\varphi_n(x) \\
&+ [\mu(y)]^{-\frac{1}{4}} \\
&\times \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^y P_{\mu n}(z, u_{\alpha,\mu,f_\varepsilon,g_\varepsilon})[\mu(z)]^{\frac{1}{2}} R^*_{\alpha,\lambda_n}[G_\mu(y) - G_\mu(z)]dz \right)\varphi_n(x).
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Kế đến, chúng ta đưa ra một số bất đẳng thức cần thiết cho việc chứng minh ở các kết quả sau. Cho $\mu \in \Delta_\delta$ với Δ_δ được định nghĩa như trong (3.3).

Bổ đề 3.1. *Cho $\delta_0 > 0$, ta đặt*

$$\gamma_0 = \min_{0\leqslant y\leqslant Y} \tau(y) - \delta_0, \quad \Gamma_0 = \max_{0\leqslant y\leqslant Y} \tau(y) + \delta_0,$$
$$\Gamma_1 = \delta_0 + \max_{0\leqslant y\leqslant Y} \left|\frac{d\tau}{dy}(y)\right|, \quad \Gamma_2 = \delta_0 + \max_{0\leqslant y\leqslant Y} \left|\frac{d^2\tau}{dy^2}(y)\right|.$$

Khi đó, với $0 < \delta < \delta_0$, $j = 1, 2$ ta có

$$0 < \gamma_0 \leqslant \min_{0\leqslant y\leqslant Y} \mu(y) \leqslant \max_{0\leqslant y\leqslant Y} \mu(y) \leqslant \Gamma_0, \quad \max_{0\leqslant y\leqslant Y} \left|\frac{d^j\mu}{dy^j}(y)\right| \leqslant \Gamma_j. \tag{3.15}$$

Từ (3.15) và (3.8), ta suy ra tồn tại hằng số dương ρ_0 sao cho

$$\sup_{0\leqslant y\leqslant Y} |\rho_\mu(y)| \leqslant \rho_0.$$

Bổ đề 3.2. *Với $0 < \xi_0 < \xi$, $0 < t < G_0$ và $0 < \alpha < 1$, ta có*

$$\left|S^*_{\alpha,\xi}(t)\right| \leqslant 2\alpha^{-\frac{t}{G_0}}, \quad \left|Q^*_{\alpha,\xi}(t)\right| \leqslant \frac{2}{\sqrt{\xi_0}}\left(\alpha^{-\frac{t}{G_0}} + \alpha^{\frac{t}{G_0}}\right),$$

$\left|R^*_{\alpha,\xi}(t)\right| \leqslant \frac{2}{\sqrt{\xi_0}}\alpha^{-\frac{t}{G_0}}$ *với $S^*_{\alpha,\xi}, Q^*_{\alpha,\xi}, R^*_{\alpha,\xi}$ được định nghĩa như trong* (3.11), (3.12), (3.13) *và G_0 như trong* (3.10).

Bổ đề 3.3. *Với $\sigma \in \mathbb{R}$, $0 < a < b$, và $L_\sigma = \max\{|\sigma|a^{\sigma-1}, |\sigma|b^{\sigma-1}\}$, ta có*

$$|s^\sigma - r^\sigma| \leqslant L_\sigma|s - r|, \forall s, r \in [a, b].$$

Bổ đề 3.4. *Với $0 < t < T$, $0 < \alpha < 1$, ta có*

$$\sup_{\xi\geqslant 0} \frac{\xi e^{\xi t}}{1 + \alpha e^{\xi T}} \leqslant \frac{1}{T}\max\left\{2, \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{\alpha}\right)\right\}\alpha^{-\frac{t}{T}}.$$

Kế tiếp, chúng ta sẽ giới thiệu định nghĩa của không gian loại Gevrey (xem [3, 25, 32]) trước khi đưa ra phương pháp chỉnh hóa của chúng ta.

Điều kiện loại Gervey

Với $\kappa > 0$, ta đặt

$$\mathbf{Ge}_\kappa = \{v \in L^2(\Omega), \sum_{n=1}^{\infty} e^{2\kappa\sqrt{\lambda_n}} \left| \langle v, \varphi_n \rangle_{L^2(\Omega)} \right|^2 < \infty\}. \tag{3.16}$$

Như chúng ta đã biết, đây là không gian Hilbert với chuẩn như sau

$$\|v\|_{\mathbf{Ge}_\kappa} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{2\kappa\sqrt{\lambda_n}} \left| \langle v, \varphi_n \rangle_{L^2(\Omega)} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

3.4 Ước lượng hội tụ cho chỉnh hóa

Định lý sau đây là kết quả về tính đặt chỉnh của bài toán (3.14).

Định lý 3.2. *Bài toán (3.14) có duy nhất nghiệm trong $C([0, Y]; L^2(\Omega))$. Hơn nữa, với dữ liệu cho trước μ thuộc Δ_δ, ta có ước lượng sau đây*

$$\|u_{\alpha,\mu,f_\varepsilon,g_\varepsilon}(.,y) - u_{\alpha,\mu,f,g}(.,y)\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \varepsilon \mathfrak{B}(y) \alpha^{-\frac{G_\mu(y)}{G_0}}, \tag{3.17}$$

với $\mathfrak{B}(y) = 2b_0\big(1 + b_1 y e^{b_1 y}\big)^{\frac{1}{2}}$ và b_0, b_1 là các hằng số.

Bổ đề 3.5. *Giả sử G_0 như trong (3.10), G_τ như trong (3.4). Ta xét không gian Gevrey $\mathbf{Ge}_{G_0}$ được định nghĩa như trong (3.16). Với dữ liệu cho trước $(f, g) \in (\mathbf{Ge}_{G_0})^2$, nếu nghiệm chính xác $u_{\tau,f,g}$ thỏa mãn $\int_0^y \|u_{\tau,f,g}(.,z)\|^2_{\mathbf{Ge}_{G_0}} dz \leqslant \mathfrak{D}, \forall y \in [0, Y]$, chúng ta có ước lượng sau đây*

$$\begin{aligned} &\|u_{\alpha,\tau,f,g}(.,y) - u_{\tau,f,g}(.,y)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leqslant \sqrt{\mathfrak{D}_0(\alpha,y)\left(1 + y\mathfrak{D}_1(y) e^{y\mathfrak{D}_1(y)}\right)} \alpha^{1-\frac{G_\tau(y)}{G_0}}, \end{aligned} \tag{3.18}$$

với $\mathfrak{D}_0(\alpha, y), \mathfrak{D}_1(y)$ bị chặn.

Bổ đề 3.6. *Giả sử $\mu \in \Delta_\delta$ và*

$$G_{\mu\tau}(y) = \max\left\{G_\mu(y), G_\tau(y)\right\}, \tag{3.19}$$

với G_μ, G_τ được định nghĩa như trong (3.4). Với dữ liệu cho trước $(f,g) \in (L^2(\Omega))^2$, tồn tại hằng số $\mathfrak{C}(y,\tau)$ phụ thuộc vào y,τ sao cho

$$\begin{aligned}&\left\|u_{\alpha,\mu,f,g}(.,y)(.,y) - u_{\alpha,\tau,f,g}(.,y)\right\|_{L^2(\Omega)}\\ &\leqslant \mathfrak{C}(y,\tau)\left(\max\left\{2, \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{\alpha}\right)\right\}\right)\delta\alpha^{-\frac{G_{\mu\tau}(y)}{G_0}}.\end{aligned} \tag{3.20}$$

Hơn nữa, chúng ta cũng nhận được

$$\begin{aligned}&\left\|u_{\tau,f,g}(.,y) - u_{\mu,f,g}(.,y)\right\|_{L^2(\Omega)}\\ &\leqslant \sqrt{\mathfrak{D}_0(\alpha,y)\left(1 + y\mathfrak{D}_1(y)e^{y\mathfrak{D}_1(y)}\right)}\alpha^{1-\frac{G_\tau(y)}{G_0}}\\ &+ \sqrt{\mathfrak{D}_0(\alpha,y)\left(1 + y\mathfrak{D}_1(y)e^{y\mathfrak{D}_1(y)}\right)}\alpha^{1-\frac{G_\mu(y)}{G_0}}\\ &+ \mathfrak{C}(y,\tau)\left(\max\left\{2, \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{\alpha}\right)\right\}\right)\delta\alpha^{-\frac{G_{\mu\tau}(y)}{G_0}}.\end{aligned} \tag{3.21}$$

Ở đây, $\mathfrak{D}_0(\alpha,y), \mathfrak{D}_1(y)$ là các hằng số được đề cập trong Bổ đề 3.5.

Kế tiếp, chúng ta trình bày định lý chính trong phương pháp chỉnh hóa của chúng ta.

Định lý 3.3. *Giả sử rằng (f,g) được xấp xỉ bởi $(f_\varepsilon, g_\varepsilon) \in (L^2(\Omega))^2$ sao cho*

$$\|f - f_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} + \|g - g_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \varepsilon.$$

Dưới các Giả thiết của Định lý 3.2, Bổ đề 3.5, và Bổ đề 3.6, chúng ta có ước lượng sau đây

$$\begin{aligned}&\left\|u_{\alpha,\mu,f_\varepsilon,g_\varepsilon}(.,y) - u_{\tau,f,g}(.,y)\right\|_{L^2(\Omega)}\\ &\leqslant \varepsilon\mathfrak{B}(y)\alpha^{-\frac{G_\mu(y)}{G_0}} + \sqrt{\mathfrak{D}_0(\alpha,y)\left(1 + y\mathfrak{D}_1(y)e^{y\mathfrak{D}_1(y)}\right)}\alpha^{1-\frac{G_\tau(y)}{G_0}}\\ &+ \mathfrak{C}(y,\tau)\left(\max\left\{2, \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{\alpha}\right)\right\}\right)\delta\alpha^{-\frac{G_{\mu\tau}(y)}{G_0}},\end{aligned} \tag{3.22}$$

với $\mathfrak{B}(y), \mathfrak{C}(y,\tau), \mathfrak{D}_0(\alpha, y), \mathfrak{D}_1(y)$ *như trong Định lý 3.2, Bổ đề 3.5, và Bổ đề 3.6.*

Kết luận

Trong luận án, chúng tôi đã nghiên cứu về bài toán Cauchy cho phương trình elliptic. Với điều kiện là hệ số của bài toán chứa biến và bị nhiễu. Trong đó, mỗi bài toán ứng với vế phải là một hàm $f(x, y)$ và hàm $f(x, y, u(x, y))$. Kết quả chính của luận án là:

Đối với Bài toán 1. Tức là bài toán Cauchy cho phương trình elliptic với vế phải là hàm $f(x, y)$ và hệ số chứa biến bị nhiễu. Bằng cách sử dụng không gian hàm phù hợp, chúng tôi đã chỉ ra bài toán tồn tại nghiệm yếu. Sau đó, bằng phương pháp chỉnh hóa chặt cụt Fourier, chúng ta có được công thức nghiệm xấp xỉ. Cuối cùng, kết quả hội tụ của nghiệm chỉnh hóa về nghiệm chính xác cũng được trình bày.

Đối với Bài toán 2. Là bài toán Cauchy cho phương trình elliptic với vế phải là hàm $f(x, y, u(x, y))$ và hệ số chứa biến cũng như các dữ liệu đầu đều bị nhiễu. Bằng cách đưa bài toán về hệ số hằng và sử dụng phương pháp chỉnh hóa bằng hàm lọc. Chúng tôi đã chỉ ra bài toán chỉnh hóa là duy nhất nghiệm. Kế đến, chứng minh nghiệm chỉnh hóa hội tụ về nghiệm chính xác khi tham số chỉnh hóa dần về 0. Sau cùng là các ví dụ trong không gian một chiều và không gian hai chiều cũng như các tính toán số nhằm minh họa kết quả lý thuyết trước đó.

Trên cơ sở những kết quả thu được trong luận án, chúng tôi xin nêu vấn đề có thể nghiên cứu và phát triển tiếp như sau.

(i) Khảo sát bài toán Cauchy cho phương trình elliptic bậc phân số với hệ số biến cho trường hợp vế phải là hàm $f(x, y)$ hoặc $f(x, y, u(x, y))$.

(ii) Khảo sát bài toán ngược cho phương trình sóng và phương trình sóng bậc phân số với hệ số chứa biến. Trong đó, có hai dạng gồm phương trình thuần nhất và không thuần nhất.

Danh mục các bài báo

[P1] A non-homogeneous Cauchy problem for an elliptic equation with non-constant coefficient. *Applicable Analysis, 101*(6), 2342–2371.

[P2] Cauchy problem for a semilinear elliptic equation with contaminated coefficients. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 132*, 107884.

Tài liệu tham khảo

[1] Adams, R. A., & Fournier, J. J. F. (2003). *Sobolev spaces.* Second edition, Elsevier B. V.

[2] H. Brezis, H. (2011). *Functional analysis, Sobolev and Partial Differential Equations.* Springer, New York.

[3] Cao, C., Rammaha, M. A.,& Titi, E. S. (1999). The Navier–Stokes equations on the rotating 2-D sphere: Gevrey regularity and asymptotic degrees of freedom. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP, 50*, 341–360.

[4] Carasso, A. (1982). Determining surface temperature from interior observation. *SIAM Journal on Applied Mathematics, 42*(3), 558–574.

[5] Cheng, H., Feng, X. L., & Fu, C. L. (2010). A mollification regularization method for the Cauchy problem of an elliptic equation in a multi-dimensional case. *Inverse Problems in Science and Engineering, 18*(7), 971–982.

[6] Cheng, H., Huang, J., & Leiterman, T. J. (2006). An adaptive fast solver for the modified Helmholtz equation in two dimensions. *Journal of Computational Physics, 211*(2), 616–637.

[7] Clark, G. W., & Oppenheimer, S. F. (1994). Quasireversibility methods for non-well posed problems. Electronic Journal of Differential Equations, 1994(8), 1–9.

[8] Denche, M., & Bessila, K. (2005). A modified quasi-boundary value method for ill-posed problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 301*(2), 419–426.

[9] Dubinskii, Y. A. (1982). The algebra of pseudodifferential operators with analytic symbols and its applications to mathematical physics. *Russian Mathematical Surveys, 37*(5), 97–137.

[10] Eldén, L., & Berntsson, F. (2005). A stability estimate for a Cauchy problem for an elliptic partial differential equation. *Inverse Problems, 21*(5), 1643–1653.

[11] Engl, H. W., Hanke, M., & Neubauer, A. (1996). *Regularization of Inverse Problems.* London, Kluwer academic publisher.

[12] Feng, X., Ning, W., & Qian, Z. (2014). A Quasi-Boundary-Value method for a Cauchy problem of an elliptic equation in multiple dimensions. *Inverse Problems in Science and Engineering, 22*(7), 1045–1061.

[13] Gilbarg, D., & Trudinger, N. S. (1983). *Elliptic partial differential equations of second order*. Springer Berlin, Heidelberg.

[14] Hadamard, J. (1902). Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique. *Princeton University Bulletin, 13*, 49–52.

[15] Hadamard, J. (1923). *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations*. New Haven Yale University Press.

[16] Hao, D. N. (1994). A mollification method for ill-posed problems. *Numerische Mathematik, 68*, 469–506.

[17] Hao, D. N., Duc, N. V., & Lesnic, D. (2009). A non-local boundary value problem method for the Cauchy problem for elliptic equations. *Inverse Problems, 25*(5), 055002.

[18] Hao, D. N., Johansson, B. T., & Lesnic, D. (2010). A variational method and approximations of a Cauchy problem for elliptic equations. *Journal of Algorithms and Computational Technology, 4*(1), 89–120.

[19] Hao, D. N., Van, T. D., & Gorenflo, R. (1992). Towards the Cauchy problem for the Laplace equation. *Partial Differential Equations Banach Center Publications, 27*.

[20] Hille, E. (1969). *Lectures on Ordinary Differential Equations*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading.

[21] Hung, V. H., & Khieu, T. T. (2022). Stability Results for Backward Nonlinear Diffusion Equations with Temporal Coupling Operator of Local and Nonlocal Type. *SIAM Journal on Numerical Analysis, 60*(4).

[22] Kirsch, A. (1996). An introduction to the mathematical theory of inverse problems. Berlin: Springer-Verlag.

[23] Lions, J. L., & Lattès, R. (1969). *The Method of Quasi-reversibility (Modern analytic and computational methods in science and mathematics)*. American Elsevier.

[24] Medeiros, L. A. (1986). Remarks on a non-well posed problem. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics, 102*(1-2), 131–140.

[25] Morimoto, Y., & Xu, J. C. (2009). Ultra-analytic effect of Cauchy problem for a class of kinetic equations. *Journal of Differential Equations, 247*(2), 596–617.

[26] Morozov, V. A. (1966). On the solution of functional equations by the method of regularization. *Soviet Mathematics - Doklady, 7*, 414–417.

[27] Nikol'skii, S. M. (1975). *Approximation of functions of several variables and imbedding theorems*. Springer, Berlin.

[28] Qian, Z., Fu, C. L., & Li, Z. P. (2008). Two regularization methods for a Cauchy problem for the Laplace equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 338*(1), 479–489.

[29] Renardy, M., & Rogers, R. C. (2004). *An introduction to partial differential equations*. Springer-Verlag, Second Edition.

[30] Showalter, R. E. (1975). Quasi-reversibility of first and second order parabolic evolution equations. *Research Notes in Mathematics, 1*, 76–84.

[31] Tuan, N. H., Binh, T. T., Viet, T. Q., & Lesnic, D. (2016). On the Cauchy problem for semilinear elliptic equations. *Journal of Inverse and Ill-posed Problems, 24*(2), 123–138.

[32] Tuan, N. H., Thang, L. D., & Lesnic, D. (2016). A new general filter regularization method for Cauchy problems for elliptic equations with a locally Lipschitz nonlinear source. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 434*(2), 1376–1393.

[33] Tuan, N. H., Thang, L. D., & Khoa, V. A. (2015). A modified integral equation method of the nonlinear elliptic equation with globally and locally Lipschitz source. *Applied Mathematics and Computation, 265*, 245–265.

[34] Tuan, N. H., Thang, L. D., Trong, D. D., & Khoa, V. A. (2015). Approximation of mild solutions of the linear and nonlinear elliptic equations. *Inverse Problems in Science and Engineering, 23*(7), 1237–1266.

[35] Tuan, N. H., Trong, D. D., & Quan, P. H. (2010). A note on a Cauchy problem for the Laplace equation: Regularization and error estimates. *Applied Mathematics and Computation, 217*, 2913–2922.

[36] Tuan, N. H., Quan, P. H., & Trong, D. D. (2010). Regularization and new error estimates for a modified Helmholtz equation. *Analele Ştiinţifice ale Universităţii "Ovidius" Constanţa. Seria: Matematică, 18*(2), 267–280.

[37] Tuan, N. H., Thang, L. D., Khoa, V. A., & Thanh, T. (2015). On an inverse boundary value problem of a nonlinear elliptic equation

in three dimensions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 426*(2), 1232–1261.

[38] Vainikko, G. M. (1982). The discrepancy principle for a class of regularization methods. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics, 22*(3), 1–19.

[39] Vainikko, G. M. (1983). The critical level of discrepancy in regularization methods. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics, 22*(6), 1–9.

[40] Zhang, H., & Wang, R. (2016). Modified boundary Tikhonov-type regularization method for the Cauchy problem of a semi-linear elliptic equation. *Inverse Problems in Science and Engineering, 24*(7), 1249–1265.

[41] Zhang, H., & Wei, T. (2014). A Fourier truncated regularization method for a Cauchy problem of a semi-linear elliptic equation. *Journal of Inverse Ill-Posed Problem, 22*(2), 143–168.

[42] Zhang, H., & Zhang, X. (2015). Filtering function method for the Cauchy problem of a semi-linear elliptic equation. *Journal of Applied Mathematics and Physics, 3*(12), 1599–1609.